



TITLE:

ボース凝縮体：基礎から応用まで
(第55回物性若手夏の学校(2010年
度),講義ノート)

AUTHOR(S):

井上, 慎

CITATION:

井上, 慎. ボース凝縮体：基礎から応用まで(第55回物性若手夏の学校
(2010年度),講義ノート). 物性研究 2011, 95(4-5): 329-347

ISSUE DATE:

2011-01-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/169415>

RIGHT:

「ボース凝縮体:基礎から応用まで」

東京大学大学院工学系研究科 准教授 井上慎

1995 年のアルカリ原子気体によるボース凝縮の成功から現在に至るまで、極低温原子、分子を用いた実験は大きな進展を遂げた。冷却原子の特徴のひとつはその制御性の良さである。弱い相互作用から強い相互作用まで自由に行き来して実験できるのは冷却原子の実験の強みのひとつである。

本講義では、現象の「直感的理解」を最優先に掲げて講義を行った。何故、凝縮するのか？長距離秩序はどうやって測るのか？凝縮体を切ったら、叩いたら、回したら、どうなるか？このような疑問に対し、数式と実験の両方から詳しく説明を行った。以下にカバーした内容を列挙する。

1. ボース凝縮の基礎
 - 1.1. 古典気体
 - 1.2. 古典気体から量子気体へ
 - 1.3. ボース凝縮
 - 1.4. レーザー冷却と蒸発冷却
 - 1.5. ボース凝縮体の干渉
2. 巨視的波動関数
 - 2.1 Gross-Pitaevskii 方程式
 - 2.2 量子渦
 - 2.3 Bogoliubov 理論
3. ボース凝縮を用いた実験から
 - 3.1 Feshbach 共鳴
 - 3.2 超放射
 - 3.3 光格子ポテンシャル
4. まとめ

なお、本稿は集中講義のテキストとなるため、**self-contained** を目指し、参考文献が多くなりすぎることを避けた。従って、当然カバーすべき内容なのに全く触れていないものも数多くある。冷却原子分野全体の概観を得たい場合は文末に挙げた参考文献を是非参照して欲しい。

1. ボース凝縮の基礎

1.1 古典気体

量子気体の性質に入る前に、理想古典気体について、良く知られた事実を復習しておこう。量子気体を記述する物理量は古典気体の性質を記述する際に既に導入されている。理想古典気体は、

衝突によって熱平衡には達するが、それ以外の相互作用の効果は無視できる理想的な気体である。理想気体の示す圧力 p 、分子数密度 n 、ボルツマン定数 k_B 、及び温度 T の間には状態方程式が成り立ち、

$$p = nk_B T$$

を満たす。従って、常温 ($T \sim 300\text{K}$)、常圧 ($p \sim 1 \times 10^5 \text{ Pa}$) 下で分子数密度は $n \sim 2 \times 10^{25} \text{ m}^{-3} = 2 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ となり固体や液体よりも 4~5 桁小さい。この密度から平均分子間距離 d を求めると $d \sim 4 \text{ nm}$ となり液体や固体内での典型的な原子間距離の約 10 倍程度となる。平均の分子速度を温度から求めると

$$\sqrt{\langle v_x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

となり、窒素分子を仮定すると、約 300 m/s 程度となる。しかし実際には隣の分子にすぐぶつかってしまう。ぶつかるまでの距離 l_{mfp} を平均自由行程 (mean free path) とよぶ。分子の衝突散乱断面積を σ とすると、平均自由行程は

$$n \sigma l_{mfp} \sim 1$$

から求められる。 $n \sim 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ 、 $\sigma \sim 10^{-14} \text{ cm}^2$ を仮定すると、 $l_{mfp} \sim 100 \text{ nm}$ 程度となる。従って分子が 300 m/s の速度を持っているといっても、我々の暮らす長さスケールでは拡散しか起こらない。しかし音速を気体分子運動論を用いて求めると、

$$v_s = \sqrt{\gamma \frac{k_B T}{m}}$$

となり、分子の速度を定数倍した値が得られる。日常生活では分子の速度は体感しにくい、音速と同じオーダーと思えば想像しやすくなる。

1.2 古典気体から量子気体へ

ここまで、気体の性質にプランク定数は登場していない。プランク定数の特徴は、状態を「数える」ことを可能にすることにある。では「容器の基底状態に入っている粒子の数の期待値」を求めてみよう。ここで基底状態と言っているのは、3 次元調和ポテンシャルならば ψ_{000} の状態を指すと考えればよい。

分布関数として Maxwell-Boltzmann 分布 $P(\epsilon) = \exp(-\beta\epsilon)/Z$ を仮定し、周期的境界条件を課すと $P(0) = 1/Z = n \lambda_{dB}^3$ と書ける。ここで $\lambda_{dB} = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ は「熱的ドブロイ長」と呼ばれる

量である。温度 T の粒子の波数の広がりを $\Delta p/\hbar = \sqrt{2m k_B T}/\hbar$ とすれば、熱的ドブロイ長はその逆数にあたり、分子の波動関数のコヒーレンス長を意味する。イメージとしては、量子力学的状態と

は1辺 λ_{dB} の立方体であり、その中の粒子数 $n\lambda_{dB}^3$ (位相空間密度) が1量子状態あたりの粒子数と考えれば良い。実際の熱的ドブロイ長を 300K の窒素分子について計算すると、 $\lambda_{dB}(300K) \sim 20\text{pm}$ となり、位相空間密度は $P(0) = n\lambda_{dB}^3 \sim 10^{-7}$ となる。この領域で気体の性質に量子性を見出すのは難しい。気体は Boson でできていようが Fermion でできていようがほとんど同じ振る舞いをする。

しかし冷却を進めると熱的ドブロイ長は増大し、ついには粒子間の平均距離に到達するはずである。位相空間密度 $n\lambda_{dB}^3$ も増大し、ついには1を超えるのだろうか？

もちろん Fermion ならば、 $P(0)$ は 1 を超えないので何かがおかしい。Maxwell-Boltzmann 分布 $P(\varepsilon) = \exp(-\beta\varepsilon)/Z$ を量子縮退の領域で使い続けたことに問題がある。正しい分布関数は Boson の場合、 $P_{Boson}(\varepsilon) = 1/(\exp \beta(\varepsilon - \mu) - 1)$ 、Fermion の場合、 $P_{Fermion}(\varepsilon) = 1/(\exp \beta(\varepsilon - \mu) + 1)$ となる。ここで、 μ は化学ポテンシャルであり、粒子数 N と状態密度 $D(\varepsilon)$ を用いて次のように決定される。

$$N = \int \frac{1}{\exp((\varepsilon - \mu)/k_B T) \mp 1} D(\varepsilon) d\varepsilon$$

実は Maxwell-Boltzmann 分布も化学ポテンシャルを用いて $P(\varepsilon) = \exp(-\beta(\varepsilon - \mu))$ と書くことも可能であったが、指数関数では定数倍とエネルギー軸方向への平行移動の区別がつかないの化学ポテンシャルを明示的に使わなかった。しかし Bose-Einstein 分布や Fermi 分布の場合には、定数倍することは許されていない。粒子数が増える、もしくは温度が下がるとそれまで負に大きな値であった化学ポテンシャルが上昇していく。ここで Fermion の場合は化学ポテンシャルが正になっても構わないが、Boson だと都合が悪い。 $P_{Boson}(\varepsilon)$ が $\varepsilon = \mu$ で発散してしまうからである。従って、 $\mu \leq 0$ が要請される。Boson のこの事情がボース・アインシュタイン凝縮の入り口である。

1.3 ボース凝縮

状態密度 $D(\varepsilon)$ は系の次元、および閉じ込めポテンシャルの形状による。例えば 3 次元箱型ポテンシャルの場合、 $D(\varepsilon) = D_0 \sqrt{\varepsilon}$ と書ける。このとき、あまり直感的でないことが起こる。熱分布に収容できる粒子数に上限ができてしまうのである。

$$N \leq N_{th} = \int \frac{1}{\exp(\beta\varepsilon) - 1} D_0 \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = \frac{D_0}{\beta^{3/2}} \int \frac{\sqrt{x}}{\exp(x) - 1} dx$$

最後の積分は $\int \dots dx = \sqrt{\pi}/2 \times \zeta(3/2) = \sqrt{\pi}/2 \times 2.61$ を与える。

$$N \leq N_{th} = \frac{V}{\lambda_{dB}^3} \times 2.61$$

従って、この限界 N_{th} を超えて粒子が存在する場合、粒子をこれ以上熱分布に収容するのは無理で、残りはどこかに「析出」せざるを得なくなる。これがボース・アインシュタイン凝縮 (Bose-Einstein Condensation, BEC) である。実際の英語の "condense" は「凝縮」と訳しても全く問題ないが特に粒子間に引力が働くわけでは全くない。むしろ、熱分布に収容できなくなって押し出され、「析出」「結露(condensation)」してきた、というイメージに近い。

実際には原子を増やすというより、冷却してボース凝縮に到達するので、転移温度 T_c という形で表現される。

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi m k_B} \left(\frac{n}{2.61} \right)^{2/3}$$

T_c は密度の $2/3$ 乗に比例する。実際、上の式に液体ヘリウムの密度と質量を代入すると約 2K を得る。これに対し、密度が約9桁薄い気体では、転移温度も約6桁下がり、1 μ K 以下になることが予想される。弱く相互作用するボース気体の凝縮は 1925 年に Einstein によって予言されていた (Einstein, (1925)) が、実際に気体で実現していなかったのはこの転移温度の低さが主な原因である。気体におけるボース凝縮の試みは 1980 年代にスピン偏極した水素を用いて精力的に進められ、蒸発冷却の実現によって、あとわずかで凝縮というレベルまで迫った (Masuhara et al., (1988))。

1.4. レーザー冷却と蒸発冷却

同じ 1980 年代に目覚ましい進展を遂げたのがアルカリ気体におけるレーザー冷却である (Chu, (1998); Phillips, (1998))。レーザー冷却の原理は極めてシンプルである。原子に共鳴光をあてた場合、1 回の吸収、放出サイクルで受け渡しされる運動量は極めて小さいが、閉じた遷移を使うことで 1 万回のオーダーで同じ遷移の吸収、放出を繰り返すことができる。上下左右 6 方向から真空槽にレーザーを照射し、レーザーの周波数をわずかに低周波側に離しておけば、原子が常に対向するレーザー光をより多く吸収し、減速される (光糖蜜)。さらに光の偏光の自由度と四重極磁場を組み合わせることで磁場のゼロ点に約 100 μ K の原子を約 10^9 個集め、密度にして 10^{10}cm^{-3} 程度の原子雲を作ることができる。この原子雲自体の位相空間密度は 10^{-6} 程度であるため量子縮退には程遠いが、水素で成功した蒸発冷却と組み合わせることで量子縮退まで到達できるのではないかという期待が高まった。

蒸発冷却の原理も極めてシンプルに理解できる。よく例に出されるのがコップの中のコーヒーが冷める理由である。熱いコーヒーの温度をなるべく保とうとして断熱性の良いカップを探す人がいるが、最も大事なものは「ふた」をするかしないであることが知られている。蒸発で逃げていく水分子は大きな運動エネルギーを持っており、その分子が逃げた結果、残りの水分子の平均運動エネルギーは低下する。残された水分子が改めて熱平衡に達したときの温度は、蒸発前の温度より下がっており、

基底状態の占有確率である位相空間密度は上昇するはずである。

従って、蒸発冷却では原子を「捨てながら」冷却する。実際の実験における「捨て方」はかなり劇的である。調和ポテンシャルである磁場トラップ中でアルカリ気体を蒸発冷却する実験では原子数も温度も蒸発冷却によって $1/1000$ になる。例えば原子数は 10^9 から 10^6 に、温度は $100\mu\text{K}$ から 100nK になる。このように大量の原子を捨ててしまっただけでは量子縮退に達するのは大変そうに見えるが、計算するとむしろ位相空間密度は劇的に上昇していることが分かる。調和ポテンシャル中では密度は $N/T^{3/2}$ に比例しているため n は30倍程度上昇している。また、ドブロイ長の3乗は $T^{3/2}$ に反比例しているためやはり30000倍程度上昇している。従って位相空間密度は合わせて 10^6 程度上昇しており、初期条件の位相空間密度が 10^{-6} 程度でも十分量子縮退に到達可能なのである。

図1にアルカリ気体でボース凝縮を達成した JILA (Anderson et al., (1995)) と MIT (Davis et al., (1995)) のグループのうち、JILA の実験結果を紹介する。図に示されたデータは原子気体をトラップから解放して十分時間がたった ($\Delta T=60\text{ms}$) 後に、レーザー光をあてて原子の密度分布を観測し、トラップ内での原子気体の運動量分布を観測したものである。左端の分布では等方的で広いガウス分布しか示さなかった原子気体の運動量分布が、 200nK ではガウス分布の他に中央に非等方で遅い、冷えた成分が現れ始め、 50nK ではほとんど全ての原子が非等方で冷えた成分に収容されてしまっていることが分かる。この「非等方で冷えた成分」がボース凝縮体である。

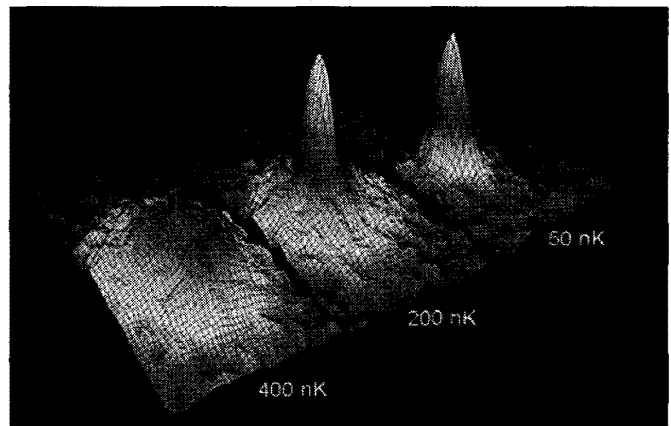


図1：アルカリ気体のボースアインシュタイン凝縮体。温度を下げるにつれて、原子の運動量分布に特徴的なピークが現れる。

<JILA ホームページより>

このように、 T_c 以下ではボース原子気体はボース凝縮体(Bose-Einstein condensate)と熱分布の2つの成分からなる、2流体モデルで記述できるように見える。調和ポテンシャル中にトラップされた、弱く相互作用するボース気体において、両者の比がどうなるかを予想し、実験と比較することがで

きる。3次元調和ポテンシャルにおいて、状態密度は $D(\epsilon) = 1/2 \times \epsilon^2 / (\hbar \bar{\omega}_{\text{trap}})^3$ とトラップ周波

数の幾何平均 $\bar{\omega}_{\text{trap}} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ であらわされる。凝縮体中の原子数を N_0 、熱分布に収容さ

れる原子数を N_{th} とすると、 $N_{\text{th}} = N - N_0 = 1.202 \times (k_B T / \hbar \bar{\omega}_{\text{trap}})^3$ となる。凝縮が始まる温度

を T_C とすると、 $N = 1.202 \times (k_B T_C / \hbar \bar{\omega}_{\text{trap}})^3$ である。従って、

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3$$

となる。この式は T_c 以下に冷却できればボース凝縮の割合は急激に立ち上がり、例えば T_c の半分まで到達できれば実に 8 割以上の原子がボース凝縮体に収容されることを意味する。実際、初期の実験において吸収イメージングを解析して N_0/N が測定され、ボース凝縮の割合が上の式をよく満たすことが確かめられた(Ensher et al., (1996))。なおここで、系の性質を決めるにあたり、次元が重要な役割を果たしていることを指摘しておこう。ボース凝縮の物理においては、3次元が最も理解しやすい。3次元箱型ポテンシャルでも3次元調和ポテンシャルでも有限温度でボース凝縮がおこり、それ以下の温度では真のボース凝縮体を得られる。これに対し、1次元や2次元の箱型ポテンシャルの場合、熱分布に収容できる原子数に上限はなく、3次元と同じ意味でのボース凝縮は起こらない。精密な議論には相図が必要だが、一般に位相空間密度が1のオーダーになると、相関の強い状態(例えば Tonks 気体など)や、相関がない代わりに局所的には超流動性を示す状態(例えば quasi-BEC)などが実現する。その定量的な評価は現在も active な研究対象である(Bloch et al., (2008))。

1.5 ボース凝縮体の干渉

ではこのようにして得られたボース凝縮体をどのようにあらわせば良いのであろうか。弱く相互作用するボース気体の理論は、多体の波動関数を極めてシンプルな形で近似して良いと教える。

$$\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots) = \prod_i \psi(\vec{x}_i)$$

すなわち、ボース凝縮体において、粒子間の相関は全て無視し、各原子は独立に振舞うと扱って良い、というのである。この「巨視的波動関数」 $\psi(\vec{x})$ の存在が、BEC の直感的理解を助け、またレーザー光などの巨視的な波動現象とのアナロジーを可能にしている。

図2に磁場トラップに閉じ込められたボース凝縮体の写真を位相コントラストイメージングで撮影した写真を示す。位相コントラスト法では吸収イメージングと異なり、トラップされた凝縮体をほとんど非破壊で写真を撮ることができる。低温になるに従い強調されてくる中央部分の密度の濃い部分がボース凝縮体である。このとき、密度分布は上の巨視的波動関数 $\psi(\vec{x})$ を用いて

$$n(\vec{x}) = |\psi(\vec{x})|^2$$

で表されると考えられる。では巨視的波動関数の位相を観測することは可能であろうか？波動性を確かめる実験と聞いて思い浮かぶもののひとつが Young の Double slit の実験である。ボース凝縮体を用いて Young の Double slit の実験を行うことを考える。

幸い、我々のボース凝縮は細長いトラップに閉じ込められているので、切断して2つにするのは簡単である。ボース凝縮体を作ったあと、斥力ポテンシャルを作るレーザー光を中心部に照射すればよい。しかる後に2つの凝縮体を同時にトラップから解放すれば、それぞれの凝縮体は持っていた運動量に従って広がっていく。その重なり領域にはちょうど2つの光源からの球面波の重ねあわ

せに相当する干渉縞が見られるであろう。

実際には、光子と原子では分散関係が異なるので、干渉縞の形も異なる。 d だけ離れた2点 $P_1(-d/2, 0, 0)$ と $P_2(d/2, 0, 0)$ を出発して時刻 T に (x, y, z) に到着した2つの原子波の位相差は

$$\Delta\phi = \frac{1}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(x+d/2)^2}{T} - \frac{1}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(x-d/2)^2}{T} = \frac{md}{\hbar T} x$$

従って、干渉縞は双曲線ではなく、直線でその間隔は $\hbar T / md$ で与えられるはずである。実際にボース凝縮体を用いて実験すると、重なり領域には直線の干渉縞が得られ、その間隔は上式で与えられるものと一致した(Andrews et al., (1997))。またイメージングの解像度から逆算すると、原子波の干渉縞のコントラストは 100%に近いことが確認された。この実験はボース凝縮が巨視的波動関数であることを初めて実証した重要な実験である。

2. 巨視的波動関数

2.1 Gross-Pitaevskii 方程式

弱く相互作用するボース気体の理論からボース凝縮体が巨視的波動関数 $\psi(\vec{x})$ で書けることが期待され、実際に実験で巨視的波動関数の干渉が観測された。では、この巨視的波動関数の満たす方程式を導いてみよう。

調和ポテンシャル中に閉じ込められた1原子の場合、シュレーディンガーの波動方程式は運動エネルギーと調和ポテンシャルを用いて次のように書かれる。

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{\text{single}}(r)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} m \omega_{\text{trap}}^2 r^2 \right) \psi_{\text{single}}(r)$$

基底状態の波動関数はガウシアンで表される。調和ポテンシャル中に閉じ込められた BEC の巨視的波動関数の場合、満たすべき方程式には原子間相互作用が足されてつぎのような形になる。

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} m \omega_{\text{trap}}^2 r^2 + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} |\psi(r)|^2 \right) \psi(r)$$

この方程式を Gross-Pitaevskii 方程式と呼ぶ。原子間相互作用が原子数密度 $|\psi(r)|^2$ に比例した平均場近似で取り入れられている。 a は原子の衝突を特徴づける量で散乱長といい、長さの次元をもつ。 ^{87}Rb では $a \sim 5 \text{ nm}$ 、 ^{23}Na では $a \sim 2.75 \text{ nm}$ など、物質(原子)の固有パラメーターである。方程式の形自体は、3次の非線形性のある媒質中での光の満たす方程式と等しい。しかし光学の場合は、非線形性の絶対値が小さく、3項目は摂動として扱われる。これに対し Gross-Pitaevskii 方程式の場合、トラップ中では相互作用の項が支配的であり、相互作用による斥力(2項目)とトラップによる閉じ込め(3項目)がつりあって BEC の形を決めている。この場合、運動エネルギー(1項目)を無視する近似(Thomas-Fermi 近似)が有効である。時間的に一定な解として左辺の時間微分を化学ポテンシャル μ で置き換えると、次式が成り立つ。

$$\mu = \frac{1}{2} m \omega_{\text{trap}}^2 r^2 + \frac{4\pi \hbar^2 a}{m} |\psi(\vec{r})|^2$$

従って、BEC の密度分布は、

$$|\psi(\vec{r})|^2 = n_0 \left(1 - r^2 / r_0^2\right)$$

と上に凸の放物線型の密度分布になる。化学ポテンシャル μ とピーク密度 n_0 は

$$\mu = \frac{\hbar \omega_{\text{trap}}}{2} \left(\frac{15Na}{a_{HO}} \right)^{2/5}, \quad n_0 = \frac{m}{4\pi \hbar^2 a} \mu$$

で与えられる。ここで $a_{HO} = \sqrt{\hbar / m \omega_{\text{trap}}}$ で、相

互作用のない場合の 1 粒子の基底状態の波動関数の大きさを示す。また、

$r_0 / a_{HO} = (15Na / a_{HO})^{1/5}$ が成り立つ。典型

的な数値例として、 $N=10^6$ 個の ^{87}Rb 原子からな

る BEC を $\omega_{\text{trap}} = (2\pi) \times 100\text{Hz}$ の等方的なトラ

ップに閉じ込めたと仮定しよう。基底状態の波動

関数の大きさは $a_{HO} = \sqrt{\hbar / m \omega_{\text{trap}}} \sim 3 \mu\text{m}$ 程

度である。実際には相互作用によって

$(15Na / a_{HO})^{1/5} \sim 7$ 倍程度に膨らんで、 $r_0 \sim 20$

μm 程度のサイズに広がっている。相互作用エネルギーによる化学ポテンシャル μ は

$$\mu = 1/2 \times \hbar \omega_{\text{trap}} \times (15Na / a_{HO})^{2/5} \sim 100\text{nK}$$

程度であり、多くの場合、温度より依然小さい。

従って、調和ポテンシャルに閉じ込められた BEC

の場合、高密度 ($n_{\text{BEC}} \sim 1 \times 10^{14} \text{cm}^{-3}$) で相互作用エネルギー ($\sim 100\text{nK}$) に支配された BEC が中

央部に生じ、低密度 ($n_{\text{thermal}} \sim 1 \times 10^{12} \text{cm}^{-3}$) で純粋な熱運動をする「thermal cloud」が全体に

薄く分布する、という空間分離した状態になる(図2)。この分離が写真で明らかなため、気体を

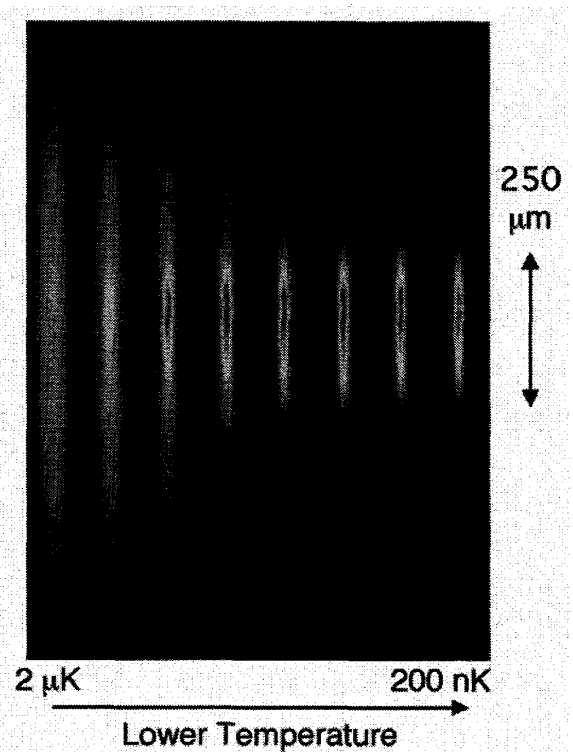


図 2：トラップ中でのボース・アインシュタイン凝縮体の生成。中央の密度の高い部分がボース・アインシュタイン凝縮体。熱分布するナトリウム原子は全体に薄く分布している。(MIT の Ketterle グループのホームページより)

BEC と thermal cloud に分けて考える「2流体モデル」が有用なことが極めて直感的に理解される。

2流体モデルは超流動液体ヘリウムの性質を説明するものとしてランダウにより導入され、大きな成功を修めた。その重要な帰結のひとつに、"second sound"や"fountain effect"がある。しかしこれらの現象をそのままアルカリ気体で見ようとしても必ずしもうまくいかない。その大きな理由はアルカリ原子気体の平均自由行程の長さにある。多くの場合、アルカリ気体の平均自由行程はミリメートルのオーダーであり、サンプルサイズより大きい。そのため、温度を局所的に定義することが困難であり、温度の伝播である"second sound"や温度勾配により発生するfountain effectの実証は難しくなる。なお、このように平均自由行程が試料のサイズより大きいケースを"collisionless regime"と呼び、平均自由行程のほうが短いケースを"hydrodynamic regime"と呼んで区別する。

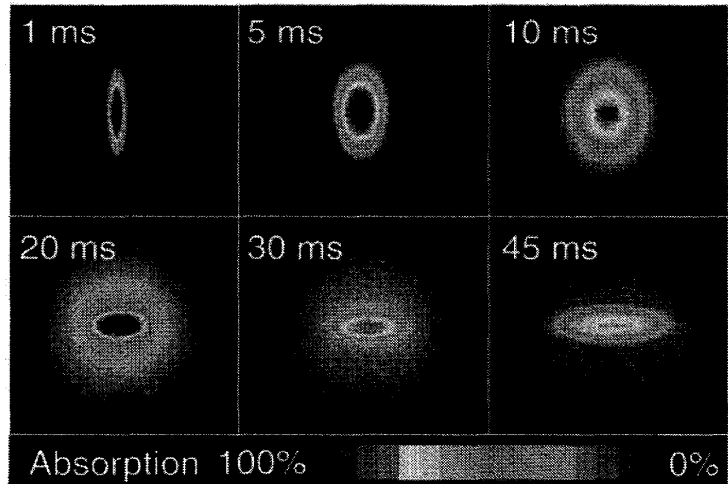


図3：ボース・アインシュタイン凝縮の吸収イメージング像。中央の低速部分がボース・アインシュタイン凝縮体。運動量空間でも熱分布する原子は全体に薄く分布している。(MITのKetterleグループのホームページより)

BECの運動量分布の写真からも2流体モデルの妥当性が理解される。ボース凝縮体の解析には「吸収イメージング」がよく使われるので、この機会に詳細を説明しておく。ボース凝縮体はもともと運動量空間の概念なので、BECや熱

分布する原子の運動量を測定することは大変重要である。また、熱分布する原子の運動量分布はそのまま系の温度を与える。運動量測定の手法は極めて単純で、それまで原子を閉じ込めていたトラップを切り、例えば $\Delta t = 30 \text{ ms}$ 程度待つ。この間に原子は初期の運動量分布に従って飛散していく。次に原子の遷移に共鳴するレーザー光を照射して、原子の「影」の写ったレーザー光の強度分布の写真 $I(x, y)$ を撮る。元々のレーザー光の強度 I_0 、原子の吸収の断面積を σ とすると、

$$\log\left(\frac{I(x, y)}{I_0}\right) = - \int n(x, y, z) \sigma dz$$

が成り立つので、 Δt だけ自由飛行(Time-Of-Flight)した後の原子気体の運動量分布が得られる。BECの典型的な吸収イメージング像を図3に示す。運動量空間でもthermal cloudとBECがよく分離されていることが分かる。温度 TOF=30ms、thermal cloudの大きさは1~150 μm なので、

$$T = \frac{m}{k_B} \left(\frac{l}{\Delta t} \right)^2 \sim 300 \text{ nK}$$

と吸収イメージから温度を決定できる。BEC の吸収イメージの取り扱いはいくらか注意を要する。BEC がトラップされている最中は、BEC の各所で相互作用エネルギーとトラップによる閉じ込めが釣り合っていた。トラップを切ると BEC は相互作用エネルギーのせいでさらに「押し広げられ」外側に加速していく。この加速は解放後、1~3ms 程度で終了し、その後は等速で広がっていくと考えてよい。始めに加速があるという意味では、花火のような広がり方とも言える。TOF 中に重力で重心が落下していくのも花火と同じである。

2.2 量子渦

ボース凝縮と超流動性は極めて密接な関連にある。超流動性は液体ヘリウムの超流動の発見とともに確立された概念で、物質の粘性がゼロになる現象として定義される。超流動は直感的な概念で、液体が非常に細い管を摩擦なしに流れたり、容器の壁にそって上昇したりする。液体ヘリウム ^4He では超流動性が実験的に発見され、その背後に ^4He のボース凝縮が存在することが徐々に明らかになった。アルカリ原子気体の場合、巨視的波動関数の存在が干渉縞の観測を通じて先に確立した。しかし超流動性については、元々電磁波によるトラップという、摩擦が問題にならない環境にあるために確かめるすべが無かった。超流動性を確かめるには「流れ」に注目しなければならない。結局、2次元的な流れにおいて渦が量子化されるという「量子渦」の観測が超流動性を確認する最も直接的な手法と考えられ、精力的に実験が進められた。

巨視的波動関数で系が記述できる場合、その速度場には非常に強い拘束がある。波動関数 $\psi(\vec{r}, t)$ を数密度 $\rho(\vec{r}, t)$ と位相 $\phi(\vec{r}, t)$ で書き直す。

$$\psi(\vec{r}, t) = \sqrt{\rho(\vec{r}, t)} \exp(i\phi(\vec{r}, t))$$

速度場 $\vec{v}(\vec{r}, t)$ は位相部分の空間微分で書ける。

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi(\vec{r}, t)$$

波動関数の一価性から、速度場の線積分は 2π の整数倍にならなくてはならない。

$$\oint \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = \frac{\hbar}{m} 2n\pi = n \frac{h}{m}$$

この条件を循環の量子化と呼ぶ。従って、中心のまわりの一様な流れを考えると、その速度は

$$v(r) = \frac{n\hbar}{m} \frac{1}{r}$$

とならざるを得ない。もし任意の速度で回転できるならば、容器の回転とともに、常に容器と同じ角速度で回転するのが最もエネルギー的には得策のように思える。しかし、回転の角運動量が量子化されているため、ある閾値までは回転が起こらず、閾値を超えて初めて $n=1$ の回転がおこる。最も直感的な方法で量子渦の作成に成功した実験が Madison et al., (2000) による実験である。

彼らはレーザー光を集光して磁気トラップ中に閉じ込められたボース凝縮体に照射した。次にこのレーザー光の空間的な形を音響光学素子を用いて回転させることで、回転するポテンシャル中でのボース凝縮体の振る舞いを観測することに成功した。回転の角速度を増やすに従い、TOF の吸収像の中に、初め何も構造が無かったところから、1個、2個と穴の開いていく様子が観測された。この穴は量子渦の渦心と考えられる。また、大きな(原子数 $\sim 10^7$ 個)ボース凝縮体を用いて同じ実験を行うと、渦の中心がきれいな三角格子を組む様子が観測された(Abo-Shaeer et al., (2001))。この格子は Abrikosov lattice と呼ばれ、超伝導体での観測が有名である。

2.3 Bogoliubov 理論

ここまで、 T_c に比べて温度が十分低ければほとんどの原子が凝縮体に含まれていると考えて良いこと、そして干渉や量子渦の実験から、凝縮体は巨視的な波動関数のように振舞うことを見てきた。では $T=0$ において、全ての原子は運動量ゼロの状態にいてと考えて良いのであろうか？特に、原子間相互作用の影響はないのであろうか？この疑問に答えるのが Bogoliubov の理論である。その結果は極めて分かりやすい。ここで、まず healing length

$\xi = 1/\sqrt{8\pi n a_{sc}}$ という長さスケールを導入する。 ξ は $(\hbar^2/2m) \times (1/\xi)^2 = 4\pi\hbar^2 n a_{sc} / m$

を満たし、運動エネルギーと mean field エネルギーがつりあう長さスケールである。

Bogoliubov によれば $T=0$ において

- (1) ボース気体の多粒子波動関数は運動量空間において、 $k = 1/\xi$ 程度まで広がりをもつ
- (2) $k=0$ の成分の割合は $n_0 = n \left(1 - (8/3) \sqrt{n a_{sc}^3 / \pi} \right)$ である。
- (3) 素励起スペクトルは $k < 1/\xi$ では直線(phonon)、 $k > 1/\xi$ では2次曲線 (particle-like) になる。

(1) と (3) は相互作用が $k < 1/\xi$ の領域に大きな影響を及ぼしていることを示す。(2) は $n a_{sc}^3$ が小さい限り、BEC を1価の巨視的波動関数で書くことが妥当であることを示している。

講義では Bogoliubov 理論の解説を行ったが、その導出は Pethick and Smith (2002)の記述をそのまま紹介したのでここでは割愛したい。得られる分散関係は

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\mu \right)}$$

ここで $\mu = 4\pi\hbar^2 a_{sc} n / m$ は相互作用によるボース凝縮体の化学ポテンシャルである。

$k < 1/\xi$ では $\varepsilon = \hbar k \sqrt{\mu/m}$ と書け、これは凝縮体中を伝わる音波(Zero-sound)の速さ C_s が

$C_s = \sqrt{\mu/m}$ で表されることを示している。実際、凝縮体をレーザー光で叩いて音波の伝播を調べたところ、その速さは上式とよく一致することが確かめられた。

3. ボース凝縮を用いた実験から

3.1. フェッシュバッチ共鳴

フェッシュバッチ共鳴は MIT の原子核物理の理論家である Herman Feshbach 教授によって発見された現象(H. Feshbach, (1958, 1962))で、束縛状態と散乱問題に関する量子力学の一般的な現象である。近年の冷却原子の成果を解説する上で、フェッシュバッチ共鳴は避けて通れない。筆者は、冷却原子におけるフェッシュバッチ共鳴を世界に先駆けて実験で実証することに成功した(Inouye *et al.*, (1998))が、その私にとってもこの現象は永遠に奥深く、完全に理解したとは決して言えない。ここでは、若手の参加者のために可能な限り平易な言葉で解説したい。

・極低温原子は小さなエネルギーに敏感である

2粒子間に力が働く場合、 $E < 0$ を扱うのが束縛問題、 $E > 0$ を扱うのが散乱問題である。では両者の間に関係はあるのだろうか？両者は $E = 0$ でつながっており、極めて密接な関係がある。アルカリ原子2個の低エネルギー散乱を例にとって、理解を試みよう。2個のアルカリ原子の相互作用エネルギーの原子核間距離への依存性を考える。2つの原子は遠距離では r^6 に反比例するファンデルワールス力($-C_6/r^6$)で引力を及ぼしあい、 $r \sim 6a_0$ あたりまで近づくと、強い斥力を感じる(ここで a_0 はボーア半径で、約 0.0529nm)。それでは、極低温の2つの原子が衝突したとして、その衝突の断面積はどれくらいであろうか？衝突に責任があるのが斥力の部分であると考え、断面積は $4\pi(6a_0)^2 \sim 10^{-14}\text{cm}^2$ となるはずである。実際は極低温原子の弾性散乱の断面積は $4\pi(100a_0)^2 \sim 10^{-12}\text{cm}^2$ 程度と100倍大きい。では $100a_0$ という長さスケールはどこから来たのであろうか？ここで、極低温原子は小さなエネルギーに敏感なことを思い出して欲しい。従って、高温原子ならば気にならない小さなポテンシャル変化も、原子の速度に大きな変化を引き起こし、散乱を生じる。具体的には、ファンデルワールス力による波数の変化が波数それ自体の大きさに比べて無視できなくなる距離を調べればよい。

$$\frac{1}{k^2} \frac{dk}{dr} \sim 1$$

ここで、初速を仮にゼロとすれば、

$$k(r) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{2\mu C_6}{r^6}}$$

である。従って、散乱の始まる半径 r' は

$$r' = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{2\mu C_6}{\hbar^2} \right)^{1/4} = \frac{1}{\sqrt{3}} l_{vdW}$$

となり、ファンデルワールス長さ l_{vdw} のオーダーとなる。Rb の質量 (87 a.u.)、 C_6 (~ 4000 a.u.)、を用いると、 $r^* = 90 a_0$ となる。極低温原子は、ファンデルワールス力のすそを敏感に感じていることが分かる。

・散乱(長)には位相も関係する

では相互作用ポテンシャルの内側部分は全く関係ないかと言うと、そのようなことはない。何故なら、外側で反射された波動関数と内側で反射された波動関数は干渉し、その位相差によって強めあったり弱めあったりするからである。ここで束縛状態を求めるための、WKB 法を思い出してみよう。上の「散乱での位相差」と呼んでいたものは、そのまま WKB 法で計算する位相に他ならない。もっと言うと、低エネルギー ($E \rightarrow 0$) の散乱において、散乱波が干渉して強めあうという現象は、波動関数の位相がちょうど 2π の整数倍であるということを意味し、それは同時に、 $E=0$ に束縛状態が存在する、ということの意味する。実際、 $E=0$ に束縛状態があれば、散乱の最中に一時的に束縛状態を構成するため散乱が強まりあう、と考えても良いのである。

以上に述べたことを数式で表現する。まず2原子の相対座標が満たすべき方程式を示す。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + U(r) \right] \psi(\vec{r}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \psi(\vec{r})$$

ここで、球対称性から波動関数を動径部分と角度部分に分解する。

$$\psi(\vec{r}) = \sum_l A_l P_l(\cos \theta) R_{kl}(r)$$

球面調和関数の性質から、動径部分の満たすべき方程式は以下のようにになる。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + U(r) \right] R_{kl}(r) = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} R_{kl}(r)$$

低エネルギー散乱の場合、 $l=0$ の項が支配的となるので以降、 $l=0$ (s 波散乱) のみを扱う。十分遠くでは、 $U(r)=0$ となるので、解は次の形に漸近する。

$$R_{k0}(r) \sim c_1 \frac{\sin kr}{kr} + c_2 \frac{\cos kr}{r}$$

ここで、散乱ポテンシャルが全くない場合は、原点での特異性がないことを考えると c_1 の項だけで c_2 の項は存在しない。しかし散乱ポテンシャルがあると、 c_2 が現れる。大事なものは c_1 と c_2 の比であり、これを散乱長と定義する。

$$a = -\frac{c_2}{c_1} \bigg|_{k \rightarrow 0}$$

散乱長は長さの次元を持ち、s 波散乱の性質を規定する。散乱断面積は散乱長で書ける。

$$\sigma = 4\pi a^2$$

この散乱長 a がそのまま上で述べた、散乱を特徴付ける長さに相当する。散乱長はファンデルワールス長と同じオーダーであり、波動関数の位相によって振動する。例えば、

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{C_6}{r^6} & r > r_c \\ \infty & r < r_c \end{cases}$$

のとき、

$$a = 0.478 l_{vdW} (1 - \tan(\Phi - 3\pi/8))$$

ただし、 $\Phi = l_{vdW}^2 / 2r_c^2$ であり、 $\Phi - 3\pi/8$ は上記の位相因子に相当する (C.J. Pethick and H. Smith, (2008))。

散乱長 a は $R_{kl}(r)$ の r -切片である。

$$R_{k0}(r) \sim \frac{\sin k(r-a)}{kr}$$

散乱長が正と言うことは、相互作用によって、波動関数がそれだけ「押し出され」ていることを示す。負と言うことは、相互作用によって、波動関数が「引き込まれて」いることを示す。このような状況を遠くから見れば、2原子がデルタ関数で相互作用しており、その大きさが a に比例している場合と、何ら変わりがないと予想される。従って、極低温原子気体の研究においては、ファンデルワールス力と近距離の斥力という難しい原子間力ポテンシャルを、 a に比例したデルタ関数で置き換えるという荒業が許される。

$$H = -\sum_i \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{4\pi \hbar^2 a}{m} \sum_{i < j} \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

このハミルトニアンがそのまま、BEC の満たす Gross-Pitaevskii 方程式の元となっている。

・散乱長を制御したいという動機がある

相互作用エネルギーは散乱長に比例する。BEC の性質には特に大きな影響を与える。 a の絶対値が小さければ、散乱断面積が小さく蒸発冷却で BEC まで到達できない。 a が負ならば引力相互作用により BEC が崩壊してしまう。 a があまりに大きいと2体だけでなく3体の相互作用が気にかかる。このような動機から、 a を制御できないか？という研究は大きな注目を集めた。

散乱長 a は幸い、位相に敏感なので、原子間ポテンシャルに何らかの摂動を加えられれば散乱長は大きな変調を受けると考えられる。原子間ポテンシャルは基本的に電荷分布で決まる。しかし原子間の電場強度は外から印加しうる電場に比べてはるかに大きく、原子間ポテンシャルの形を変化させて散乱長を変えるのは事実上不可能に近い。従って、散乱長は物質固有の定数、と受け止められ、BEC 研究の初期には、「 ^{87}Rb や ^{23}Na の散乱長は正なので安定で大きな BEC ができるが、 ^7Li (の $F=2$) の散乱長は負なので引力相互作用によって BEC は崩壊する」などと表現されていた。これに対し、スピンの自由度をフルに活用して散乱長を変えよう、と提案されたのがフェッシュバッハ共鳴を用いる手法である。

・アルカリ原子には2種類のスピン自由度がある。

実際のアルカリ原子の相互作用ポテンシャルの特長は次の2つである

(1) 近距離では、ポテンシャルは電子の全スピン1重項($S=0$)と3重項($S=1$)の2つに大きく分かれる。

(2) 遠距離(dissociation limit)では電子スピンと原子核スピンの結合が重要になる。

(1)は基底状態のアルカリ原子には、事実上2本ポテンシャルがあることを意味する。従って、深さも違えば、転回点も違う。従って、散乱長も2つある。これを singlet scattering length(a_s)と triplet scattering length(a_t)と呼ぶ。要約すると、1つの原子種なのに2つの散乱長があるのである！このことは一体どのような帰結を生むのだろうか？まず、原子のスピン状態によって、散乱長が異なり、その結果 BEC の相互作用エネルギーが異なる、という結果を生む。もし、電子スピンが完全に上を向いていたとしよう。この場合、スピン3重項状態で相互作用するので相互作用は triplet scattering length で記述される。しかし、電子スピンは必ずしも「完全に上」か「完全に下」ばかりではない。(2)で記述したように、孤立した原子では、電子スピンは原子核スピンの結合するように

なる。この相互作用は $\vec{s}_1 \cdot \vec{i}_1$ の形であるため、全角運動量 $\vec{f} = \vec{s} + \vec{i}$ が良い量子数となる。例え

ば、 ^{87}Rb や ^{23}Na の原子核スピンは $i=3/2$ であり、 $s=1/2$ と合成すると、 $f=1$ or 2 となる。基底状態の中でも実験によく使われる最低エネルギー状態は $f=1$, $m_f=1$ である。磁場がほとんどゼロの領域でこの状態を電子スピンと原子核スピンの基底で書き直すと、

$$\left| \left(s = \frac{1}{2}, i = \frac{3}{2} \right), f = 1, m_f = 1 \right\rangle = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left| s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2} \right\rangle \left| i = \frac{3}{2}, m_i = \frac{3}{2} \right\rangle + \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

となり、スピン up と down の状態が混合している。この $|1,1\rangle$ 状態の2原子が衝突した場合、近距離ではスピン1重項の状態とスピン3重項の状態の重ね合わせとなる。従って、 $|f, m_f\rangle = |1,1\rangle$ 状態の散乱長は、singlet scattering length と triplet scattering length 両方の影響を受ける。しかしその「比率」は動かすことができない。

ところで、そもそも何故実験で $|f, m_f\rangle = |1,1\rangle$ 状態が好まれるかと言うと、最低エネルギー状態で2体の非弾性衝突過程がないからである。例えば同じ $m_f=1$ の状態でも、 $|f, m_f\rangle = |2,1\rangle$ 状態の場合、衝突によって $|2,1\rangle + |2,1\rangle$ が $|1,1\rangle + |1,1\rangle$ になることも起こりうる。 $|f, m_f\rangle = |2,1\rangle$ の状態は $|1,1\rangle$ の状態よりもエネルギーが高いため、差額のエネルギーは相対運動の運動エネルギーとして放出され、原子は2個とも高速でトラップを去っていく。すなわち、 $|f, m_f\rangle = |2,1\rangle$ の状態の2原子が衝突すると一部は $|1,1\rangle$ になってロスする。では $|f, m_f\rangle = |1,1\rangle$ の状態が $|2,1\rangle$ になることは可能かという、エネルギーが足りないので無理である。しかし、結合ハミルトニアンは存在するので、virtual には可能である。ではこの virtual な状態は何か使えないだろうか？

・違うスピン状態に行って、また戻るプロセスを考える

$|f, m_f\rangle = |1,1\rangle$ の状態の2原子が相互作用して一時的に $|2,1\rangle$ の状態になり、また相互作用して $|1,1\rangle$ に戻ることは可能である。別の言葉では、このプロセスを2次の摂動とも呼ぶ。ここで2次の摂

動は、分母にエネルギー差がくる。このプロセスの振幅は非常に小さいと予想される。では $|f, m_f\rangle = |2, 1\rangle$ 状態の2つの原子からなる束縛状態(分子状態)を virtual state として使うのはどうだろうか？やはり結合ハミルトニアンは存在し、プロセスの振幅は束縛エネルギーに反比例するだろう。ただ、分子の束縛エネルギーは通常、大きいので、たいした寄与は望めないように思える。しかし、もし外場をかけてその束縛エネルギーをずっと小さくできたらどうであろうか？特に、もしゼロにできたら？例えば磁場をかけた場合、 $|1, 1\rangle$ は電子スピンの主として下を向いているため、エネルギーが下がっていくが、 $|2, 1\rangle$ は主として上を向いているため、エネルギーは上がっていく。分子の一番浅い束縛状態のエネルギーは約 1GHz 程度と予想される。磁場をかけると $|2, 1\rangle$ は約 0.7MHz/Gauss で上に、 $|1, 1\rangle$ は約 0.7MHz/Gauss で下に動くはずなので、700Gauss 程度の磁場をかければ両者は交わる！すなわち、 $|1, 1\rangle$ と $|2, 1\rangle$ の衝突の最中に、仮想的に $|2, 1\rangle$ の分子状態に行き戻ると、というプロセスが許され、その振幅が共鳴的に大きくなることが予想される。これがフェッシュバッハ共鳴である。

フェッシュバッハ共鳴はまず初めにボース凝縮体の相互作用エネルギーを制御することに使われたが、最も成功を収めたのは Fermion を用いて超伝導状態を作る実験である。フェッシュバッハ共鳴点では、弾性散乱が増強されるが、非弾性散乱も大きくなり、トラップから原子が失われてしまう。2種のスピン状態の Fermion を用意した場合、2体の相互作用は増強されるが3体の非弾性散乱は抑制できるので理想的な実験ができる。特に s-波の相互作用の場合、フェッシュバッハ共鳴に沿って磁場を制御すると、BCS ペアによる超伝導状態から分子の BEC まで連続的に移行できることが予言され、注目を集めた(M. Holland et al., (2001))。実際に Fermion 原子を用いて実験が行われ、弱く束縛した分子の BEC、(M. Greiner, et al., (2003))、BCS 状態の実現 (C.A. Regal, et al., (2004))、BCS ペアの束縛エネルギーの測定 (C. Chin et al., (2004))などが次々と行われた。フェッシュバッハ共鳴を用いた BCS-BEC クロスオーバーの実験については、Bloch et al., (2008)などが詳しい。

3.2. 超放射

ボース凝縮体の光散乱について考えてみる。まず準備として通常の光散乱を考えてみよう。トラップされた原子気体に時間的に一定な強度のレーザー光を照射するとする。気体中の原子はレーザー光から光子を1個吸収し、その後、ランダムな方向に自然放出する。原子は自然放出の後、基底状態に戻る。しばらくすると、また気体中の原子が光を吸い、そして放出する。この一連の過程を Rayleigh 散乱と呼ぶ。散乱による自然放出光の強度は時間的に一定であり、散乱光を積算してみた場合、その方向は等方的である⁽¹⁾と期待される。

ではボース凝縮体に同じように光をあててみたとしよう。何か差異が考えられるであろうか？

¹ 正確には偏光方向に依存する。直線偏光の散乱は双極子放射パターンを描く。

上の考察で抜けていたもののひとつに運動量保存則がある。一回目の散乱で、原子は一個光子を吸収し、自然放出で違う方向に放出している。この差額の運動量はどこにいったのであろうか？散乱した原子が受け取ったはずである。実際には、どの原子が受け取ったか特定できないので、この散乱の結果は N_0 個の BEC 中の原子のうち 1 個が $\psi_{recoil}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i(\vec{k}_{in} - \vec{k}_{out}) \cdot \vec{r})$ に移されたと解釈できる。ここで k_{in} は入射レーザー光の波数、 k_{out} は自然放出された光子の波数、 V は BEC の体積である。（この原子の波動関数を「反跳状態(recoil mode)」と呼ぶことにする。）ところでこの反跳状態の原子の波動関数と、元の BEC 中の原子の波動関数は、干渉する。この干渉縞は光を回折することができる。回折する方向は $k_{in} + (k_{out} - k_{in}) = k_{out}$ であり、先ほど最初に自然放出があったのと同じ方向である。

次の散乱が自然放出になるか回折になるかは確率しか分からない。自然放出のレートは常に変わらないであろうから、回折のレートを考えよう。回折においては、回折波の振幅が回折格子の振幅に比例する。すなわち、回折のレートは回折格子の振幅の 2 乗に比例するであろう。BEC 中の原子数を $N_0 - 1$ 、それまでに反跳を受けた原子の個数を N_r とすれば、回折格子の振幅は $\sqrt{N_r(N_0 - N_r)}$ であるから、単位時間あたりの回折確率 R は

$$R \propto N_r(N_0 - N_r)$$

となる。

ここまで、原子波を第 2 量子化せずに議論した。原子波を第 2 量子化すると、上記の「自然放出」と「回折」は統合され、特定の方向への散乱確率 R は

$$R \propto (N_r + 1)(N_0 - N_r)$$

となる。 R は dN_r/dt に比例しているから

$$\dot{N}_r \propto G_r(N_r + 1)(N_0 - N_r)$$

となる。実際には、散乱した原子は飛び去って行くので、

$$\dot{N}_r \propto G_r(N_r + 1)(N_0 - N_r) - L N_r$$

とでも書くのが正しいであろう。

すなわち、光の散乱は自然放出的に始まり、指数関数的の増大し、BEC 中の原子を使い切ると終了する。実際には、光の散乱方向が多数あるのと同様に、反跳モードも多数、存在する。導出の詳細は省くが、散乱光の立体角の計算から、細長い BEC の長軸方向へ光を散乱する回折格子の G_r が最も大きく、「育ちやすい」ことが分かる。この一連の考察は、ボース凝縮体のコヒーレンスの良さによって、Rayleigh 散乱がポツポツとランダムに起こる事象から、コヒーレントな回折現象に移り変わると主張しており、Dicke が 1954 年に主張した「超放射」の散乱版であると理解することができる。ボース凝縮体からの超放射的な光

散乱は 1999 年に MIT のグループにより初めて観測された(S. Inouye et al., (1999)).²

3.3 光格子ポテンシャル

光格子ポテンシャルにボース凝縮体を閉じ込めることによって、モット絶縁体に代表される強相関状態を作り出すことが出来ることを 1998 年、Jaksch らが指摘した(D. Jaksch, et al., (1998))。2002 年、Bloch たちは光格子中に閉じ込められたボース原子を用いて、相互作用が支配的な状態を作り出し、超流動ーモット絶縁体転移を実現することに成功した(M. Greiner et al., (2002))。これ以降、冷却原子を用いて固体物性の基礎的概念の実証が次々に行われていったという意味でこの実験は非常に意義深いものである。ここでは詳細を取り上げないが、その間の review はやはり Bloch et al., (2008)が詳しい。なお、最近では光格子の各サイトのイメージングも可能になっている(W.S. Bakr et al., (2009), (2010))。

4.まとめ

以上、極めて駆け足、しかも独断的にボース凝縮の物理の面白さの一面を切り取ってお届けしたつもりである。以下、この分野の概観を得るために適当と思われる review paper を紹介したい。ボース凝縮体の理論、実験の基礎を手早く身につけるには Dalfovo et al., (1999), Ketterle et al., (1999)が参考になる。概念的な疑問が気になる人は Leggett, (2001)を読むのが良いであろう。冷却原子を用いた強相関の物理の探求である BCS-BEC クロスオーバー、超流動モット転移、BKT や Tonks gas といった低次元系を知りたければ Bloch et al., (2008)が素晴らしい。Feshbach 共鳴の背景を知りたければ、Köhler et al., (2006) は難解な理論を丁寧に解説しており、頼りになる。Feshbach 共鳴を用いた最新の実験成果の網羅的な review としては Chin et al., (2010)がある。

最後に本稿を仕上げるにあたり、東京大学大学院工学系研究科修士課程在籍の加藤宏平君のお世話になった。この場を借りて感謝したい。

² 熱分布する原子気体でも散乱レートがコヒーレンス時間より速ければ超放射は起こる。(Y. Yoshikawa et al., (2005))

参考文献

- J.R. Abo-Shaeer, , C. Raman, J. M. Vogels, and W. Ketterle, *Science* **292**, 476 (2001).
- M.H. Anderson, , J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
- M.R. Andrews, et al., *Science* **275**, 637 (1997).
- W.S. Bakr, et al. *Science* **329**, 547 (2010)
- W.S. Bakr, J.I. Gillen, A. Peng, S. Fölling, M. Greiner, *Nature* **462**, 74-77 (2009)
- I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008)
- C. Chin et al., *Science* **305**, 1128 (2004).
- C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1225 (2010).
- Steven Chu, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 685 (1998)
- K.B. Davis, et al., *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- F.S. Dalfovo, L.P. Pitaevskii, S. Stringari, and S. Giorgini, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- A. Einstein, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Kl. Bericht* **3**, 18 (1925).
- J. R. Ensher, D. S. Jin, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4984 (1996)
- H. Feshbach, *Ann. Phys. N.Y.* **5**, 357–390 (1958); *ibid*, **19**, 287–313 (1962).
- M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Haensch and I. Bloch, *nature* **415** 39 (2002).
- M. Greiner, C.A. Regal, and D.S. Jin, *Nature* **426**, 537 (2003),
- M. Holland et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120406 (2001)
- S. Inouye, et al., *Nature* **392**, 151 (1998).
- S. Inouye et al., *Science* **285**, 571 (1999).
- D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3108 (1998)
- W. Ketterle, D.S. Durfee, and D.M. Stamper-Kurn, *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CXL*, edited by M. Inguscio, S. Stringari and C.E. Wieman (IOS Press, Amsterdam, 1999) pp. 67-176.
- T. Köhler, K. Góral, and P.S. Julienne, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 1311 (2006)
- A.J. Leggett, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 307 (2001)
- K.W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 806 (2000).
- N. Masuhara, et al., *Phys. Rev. Lett.* **61**, 935 (1988).
- C. Pethick and H. Smith, 2002, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K.)
- W. D. Phillips, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 721 (1998)
- C.A. Regal, M. Greiner, and D.S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040403 (2004).
- Y. Yoshikawa, Y. Torii, and T. Kuga, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 083602 (2005)